Ueber

barytrope und tautobaryde Curven.

Inaugural-Dissertation

der philosophischen Facultät zu Marburg

zur

Erlangung der Doctorwürde

vorgelegt

von

Carl Heinrich Müller,

O. Lehrer an dem Gymnasium zu Hadamar.

Marburg, 1880.

Druck von Herm. Hemmerle in Hadamar.

Berichtigungen.

Seite	1	Zeile	12	von	unten:	Tautochrone statt Tantochrone.
„	2	„	20	„	„	verschiedenen statt verschiedener.
„	„	„	2	„	„	Centri- statt Contri-.
„	3	„	6	„	oben:	von statt vo.
„	„	„	13	„	„	zusammenhängen statt zusammfallen.
„	„	„	„	„	unten:	Problèmes statt Problêmes.
„	6	„	2 u. 3	„	„	y-Achse, x-Achse statt Y-Achse, X-Achse.
„	7	„	14	„	oben:	$\frac{1}{2} v^2 - \frac{1}{2} v_0^2$ statt $\frac{1}{2} v_0 \frac{1}{2} v_0^2$.
„	10	„	3	„	unten:	(8) statt (8a).
„	14	„	5	„	„	brachistochrone statt brachystochrone.
„	16	„	2	„	oben:	$y_0 = \frac{v_0^2}{2g}$ statt $y_0 \frac{v_0^2}{2g}$
„	18	„	5	„	„	$\sqrt{1 + p^2}$ statt $\sqrt{1 + p^3}$.
„	„	„	6	„	„	$= -1$ statt $= 1$.
„	„	„	7	„	unten:	$l\left(\frac{1 + \sin \tau_0}{\cos \tau_0}\right)$ statt $l\frac{1 + \sin \tau_0}{\cos \tau_0}$.
„	19	„	8	„	oben:	enthält statt enthällt.
„	21	„	1	„	„	dem statt den.
„	21	„	7	„	„	für x_1 statt für x.
„	21	„	3	„	unten:	gewöhnlichsteu statt gewöhnlichsten.
„	24	„	3	„	„	gewöhnlichsten statt gewönlichen.

Ueber

barytrope und tautobaryde Curven.

Eine historische Studie aus der analytischen Mechanik.

I.

Man kann die Entwickelung der Mechanik und ihrer grossartigen Hülfswissenschaft, der Mathematik, nirgends besser studieren als an gewissen Problemen, die, wie fast in allen Wissenschaften, zuerst eine eigentlich wissenschaftliche Behandlung und Systematisirung des betreffenden Gegenstandes hervorgerufen haben. Die ägyptischen und griechischen Mathematiker, insbesondere aber Archimedes, geben ein augenfälliges Zeugnis, wie das Problem der Beginn des wissenschaftlich mathematischen Denkens war, welches durch das Hinzutreten des philosophisch verfeinerten Zeitbegriffes eine Kinematik erfand und schliesslich auch die Materie in den Bereich seiner Principien und Methoden zog. Es entstand so das, was wir jetzt analytische Mechanik nennen.

Jedem Kenner der rationellen Mechanik wird es ein Genuss gewesen sein, an der Hand berühmter Aufgaben die schärfere Fassung alter Begriffe und die Eroberung von neuen, die Vernichtung alter Methoden und die Erfindung neuer zu verfolgen. Man trifft auch hier auf einen wahren Kampf um's Dasein, der für die Gegenwart die schönsten Früchte gezeitigt hat. Ich habe nur nötig, an das Problem der Tantochrone und die damit verbundene Entwickelung einer eigenthümlichen Bewegungsform zu erinnern. Nicht so bekannt scheint mir eine andere Aufgabe zu sein, die trotzdem nicht verfehlt hat, einen grossen Einfluss auf die Präcisirung mancher Begriffe auszuüben, welche ferner in schönster Weise zeigt, mit welchem Erfolge die Infinitesimalrechnung mechanische Probleme erfasst hat.

Johann Bernoulli, Professor der Mathematik in Groeningen und Basel, war bekanntlich ein Meister in der Stellung und Behandlung von Problemen der Mathematik und mathematischen Physik, ihm verdanken diese Disciplinen einen immensen Aufschwung. Er stellte, als er mit der Theorie der Bewegung eines materiellen Punktes auf vorgeschriebener Bahn beschäftigt war, folgende Aufgabe, deren Wortlaut ich der „Histoire de l'academie des sciences" année 1700 (Amsterdam 1706 p. 100.) entnehme:

„Trouver dans un plan verticale une ligne courbe, telle qu'un corps qui la décriroit descendant librement, et par son propre poids, la pressât toujours dans chacun de ses points avec une force égale à sa pesanteur absolue."

Ursprünglich gab Bernoulli das Problem in den „Act. erud. Lips." t. II, sect. VI. pg. 291; es findet sich auch in dem „Commerc. epistolic. Leibnitzii et Bernoulli," epist. VII, in dessen Besitz ich leider nicht gelangen konnte; dagegen habe ich meines Wissens alle nennenswerten Bearbeitungen und Erweiterungen des Gegenstandes gelesen und verglichen. Es soll daher zunächst meine Absicht sein, eine kurze historische Studie zu liefern, um sodann daran die Lösung eines einzelnen nicht uninteressanten Falles zu knüpfen. Ueberhaupt stösst man hier auf eine Fundgrube merkwürdiger und ergiebiger Aufgaben, deren Behandlung nicht allzu schwierig erscheint; die entspringenden Differentialgleichungen sind meist einfacher Art. Es wundert mich daher, dass nur in neueren englischen und französischen Werken Wert darauf gelegt worden ist.

Der Titel dieser Abhandlung, den ich einem neueren englischen Schriftsteller (Peirce) entlehnt habe, ist schon aus den Worten Bernoullis verständlich; es handelt sich also um Curven, seien sie eben oder doppelt gekrümmt, bei denen der Druck (pression) einer bestimmten Forderung unterworfen ist. In dem citirten Bande der Hist. de l'acad. wird schon bemerkt, dass eine Lösung unmöglich sei, wenn man sich vorstelle, es wirke eben nur die Schwerkraft an einem sich in Bewegung befindlichen Körper auf krummer Bahn, da nur eine horizontale Gerade der gestellten Bedingung genügen könne. Die Möglichkeit wird erst dadurch begründet, dass ein solcher Körper noch unter dem Einflusse einer andern von der Schwere gänzlich verschiedener Kraft, der Centrifugalkraft (force centrifuge), steht. Dieselbe wird sehr richtig als eine Componente der dem Körper innewohnenden Trägheitskraft aufgefasst, die sich als Widerstand kundgibt, wenn man der Bewegung statt der einfachsten, geradlinigen Bahn eine krummlinige vorschreibt. Man erkennt auch damals im allgemeinen schon die Abhängigkeit der Centrifugalkraft vom Krümmungsradius der Curve und begreift, dass sowohl der als Druck wirkende Teil der Schwerkraft als auch die Centrifugalkraft auf einer Curve der gesuchten Art sich derart ändern müssen, dass die letztere Kraft stets die Normalcomponente der Schwere zum vollen Gewicht ergänzt.

Bernoulli selbst löste das Problem unvollständig. Man hatte bis dahin noch keine genaue Theorie der Centrifugalkräfte, von welcher eine richtige Lösung doch vorzugsweise abhing, weder Mass noch Regel derselben waren bekannt. Allerdings hatte Huygens am Ende der Abhandlung „De Horologio Oscilatorio" einige Sätze mit genauen, mathematischen Beziehungen, jedoch ohne Herleitung und Beweis; daraus ging hervor, dass er dieselben wohl besass, er überlies es aber den Mathematikern, das Rätsel zu lösen. Newton hatte indessen einen Teil gefunden. Aber auch angenommen, die Theorie jener eigenthümlichen Kräfte wäre gewiss genau ergründet worden, so war doch die Lösung für die etwas starren Methoden der damaligen Zeit noch sehr schwierig, umsomehr als hier zwei Kräfte in Zusammenhang traten, über deren Wirkungsweise man lebhaft stritt, ausser der Contrifugalkraft noch die Schwerkraft.

Der Marquis de l'Hôpital versucht zuerst (Mem. de l'acad. des. sc. 1700. pg. 15) die Lösung vermöge seiner Methode des Unendlichkleinen und glaubt, dass auf anderem Wege die Lösung unmöglich sei. Er entdeckt zu dem Zwecke zuerst die bekannten Gesetze der Schwungkraft bei kreisförmiger Bahn und zeigt, wie diese und die Schwerkraft mit gemeinschaftlichem Mass gemessen werden können. Die Abhandlung vo de l'Hôpital ist wichtiger wegen eben dieser theoretischen Entwicklung als wegen der Lösung. Letztere wird gegeben als nur gültig für den Fall, dass der Körper schon eine gewisse Anfangsgeschwindigkeit besitze. Nicht uninteressant ist seine eigenthümliche Integrationsmethode, die auch noch später von Varignon, Euler und Jullien benutzt und erweitert wird. Er ist ferner der einzige, der die gefundene Coordinatengleichung der Curve des gleichmässigen Drucks (d'égale pression) wirklich näher discutirt, wobei er aber übersieht, dass sie aus zwei symmetrischen Teilen besteht, deren Aeste im Endlichen nicht zusammenfallen, wie ich an einem anderen Orte gezeigt habe. L'Hôpital fasst sodann das Problem insofern allgemeiner, als er die Bedingungsgrösse, den gesammten Normaldruck, auch anderen Grössen ausser dem absoluten Gewicht gleichsetzt und entwickelt hieraus die Veränderungen der krummen Bahn; so findet er für den Fall, dass der Normaldruck $= 0$ wird, die gemeine Parabel, ein Resultat welches schon Galilei gefunden hatte. Seinen Rechnungen klebt aber der Mangel an, dass die Gesetze der Centrifugalkraft noch nicht in ihrer ganzen Allgemeinheit erkannt sind; er versteht es offenbar nicht, den Krümmungsradius als allgemeine Function darzustellen; diese Erweiterung macht erst Varignon (pg. 108), während l'Hôpital sich einen Osculation-Kreis vorstellte, dessen Mittelpunkt sich fortwährend verändert und so die Enveloppe beschreibt. Indessen gelangt er durch die noch so steife geometrische Betrachtungsweise auf merkwürdige Beziehungen und eine einfache Wahl des Coordinatensystems, auch entdeckt er manche Sätze über den Krümmungshalbmesser.

In der nächsten Zeit wurden ähnliche Probleme gestellt, unter anderen dasjenige von Parent (Hist. et mémoires de l'acad d. sc. Amsterd. 1709. pg. 101 u. 108):

Du plan, sur lequel un corps descendant fait chaque partie des impressions qui sont en raison réciproque des temps qu'il employe à les parcourir. (12. Mai 1709.)

Hier wird zuerst ein Unterschied gemacht zwischen „force“ und „impression“. Ein Körper kann nach Parent in der Ruhe mit einer „force“ auf eine Unterlage drücken, wodurch dieselbe eine „impression“ erhält, die gleich der „force“ ist. Dagegen kann bei einem Körper, der eine unendlich grosse Geschwindigkeit besitzt die „force“ dieselbe, aber, die „impression“ $= 0$ sein. Parent findet als Lösung für sein Problem die Cycloide (courbe d'égale impression), obgleich die eigentliche „force“ (Normaldruck) immer grösser wird, im Gegensatz zu l'Hôpital, dessen Curve bei stets gleichbleibender „force“ (Normaldruck) immer weniger „impression“ erhält. Er hat ausserdem gezeigt, dass bei der Cycloide die Centrifugalkraft stets gleich der Normalcompenante der Schwere ist, auch entgeht ihm nicht der specielle Fall an der Spitze der Cycloide, wo Centrifugalkraft uud Schwerkraftscomponente unendlich klein sind und bei unendlich kleiner Geschwindigkeit eine endliche „impression“ liefern sollen.

Die merkwürdige, etwas unklare Unterscheidung zwischen „force“ und „impression“ hat Saurin gemacht und dadurch dem Irrtum vorgebeugt, als wären beide Lösungen, die von l'Hôpital und Parent, richtig. Saurin hat sodann nachgewiesen, dass die „impression“ beim Kreise wächst, also nicht wie bei der Cycloide gleichbleibt. — Unter impression ist hier wahrscheinlich dasjenige zu verstehen, was wir jetzt „Arbeit“ nennen; eine Bedeutung für die spätere Entwicklung hat dieser Fall nicht, wiewohl man ganz gut die Forderung so stellen könnte, dass die in jedem Curvenpunkte geleistete Arbeit oder die jeweilige lebendige Kraft einer gewissen gegebenen Function gleich sei.

Weitaus die bedeutendste Arbeit liefert Varignon: „Sur une integrale donnée par M. le marquis de l'Hôpital ou sur les pressions des courbes en général.“ Hist. et mém. de l'acad des scienc. 1710. pg. 129 u. 196. Amsterd. Jede spätere Behandlung muss notwendig Varignons Entwicklungen berücksichtigen. Die Integrationsmethode von l'Hôpital wird erweitert und der Normaldruck als beliebige Function aufgefasst, aus der man schon reelle und imaginäre Lösungen zieht. Varignon zeigt, dass bei veränderlicher Druckkraft die Ordinate der Curve (bei der üblichen Wahl desselben, nie unendlich werden kann und erhält die Cycloide nach Parent, den Kreis nach Saurin, sowie unter der Voraussetzung, dass die Druckkräfte dem Quadrate der Fallhöhen proportional sind, die elastische Curve.

Den Fall, dass nur die Centrifugalkraft und nicht die Schwerkraft wirke, untersucht Varignon mit Hülfe desselben Integrals und gelangt zu ganz ähnlichen Curven, wie wenn letztere noch mitwirke. Wird nun gar die Centrifugalkraft (C) constant, so ergeben sich 2 Lösungen, eine reelle und eine imaginäre. — Ganz ähnlich untersucht er den Fall, dass die Schwerkraft resp. ihre Componente (N) allein wirke und deutet auch auf die Bestimmung eines Verhältnisses zwischen N und C. hin.

Solche Lösungen des Problems setzen die damals neuen Entdeckungen der analytischen Geometrie in helles Licht und ermöglichen auch die Behandlung für ein widerstehendes Mittel. Die Hist. et mém. de l'acad. d. sc. 1742 berichten p. 78 über die Arbeit eines jungen Irländers d'Arcy: „Sur la courbe d'égale pression dans un milien résistant.“ Dieser nimmt den Normaldruck (N + C) als constant und den Widerstand des Mittels nach Newton dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional an.

Es bleibt einem Euler vorbehalten, die Aufgabe in den richtigen Zusammenhang mit dem erst durch ihn begründeten Lehrgebäude einer analytischen Mechanik zu bringen. (Mecanica. II. pg. 87. sq. Ausgabe von Wolfers.) Die Lösung erscheint zuerst als Anwendung der Theorie der nicht freien Bewegung und wird mit Benutzung der Abhandlung von Varignon ziemlich erschöpft. Interessant sind namentlich die scharfsinnigen Umkehrungen des Problems, dem er so von allen Seiten zu Leibe geht. Die Integrationen sind zwar unseren neuen, eleganteren Methoden gegenüber etwas fremdartig, aber scharfsinnig genug, um studiert zu werden.

Nachdem Euler das Ganze von so allgemeinem Standpunkte aus betrachtet hat, scheint es recht nützlich zu sein, die einzelnen Seiten des Problems unter folgenden Gesichtspunkten zusammenzufassen.. Seine Behandlung gliedert sich ungefähr folgendermassen:

I. Das Problem für die Bewegung in der Ebene.

1. Gegeben Kraftgesetz und Anfangsgeschwindigkeit, gesucht die Bahn.
2. Gegeben die Bahn und die Anfangsgeschwindigkeit, gesucht das Kraftgesetz.
3. Behandlung von I_1 u. I_2. mit Berücksichtigung von Reibung u. Widerstand.

II. Das Problem für die Bewegung im Raume.

A. Auf einer doppelt gekrümmten Curve nach den Gesichtspunkten 1, 2 und 3. und schliesslich

B. auf einer Fläche.

Allerdings hat Euler diese Aufgaben lange nicht alle gelöst, teilweise nur angedeutet, darunter z. B. diejenigen, in denen gewisse Verhältnisse zwischen den Bestandteilen des Normaldrucks gegeben sind, sodass also noch genug zu thun übrig bleibt. Er ist übrigens der erste, der diese Classe von Curven in Verbindung mit den brachystochronen Curven bringt, indem er das wichtige Gesetz ableitet:

Wie auch die antreibenden Kräfte beschaffen sein mögen, so ist diejenige Linie die brachystochrone, gegen welche der auf ihr sich bewegende Körper einen doppelt so starken Druck ausübt, als vermöge der Centrifugal- oder Normalkraft (der antreib. Kraft) allein hervorgebracht werden würde. — Im Einzelnen hat der berühmte Geometer noch den Einfluss des Auf- und Absteigens und der Anfangsgeschwindigkeit auf die Gestalt der Curven untersucht. Ebenso merkwürdig sind schliesslich die entwickelten Beziehungen der Fallhöhen, Fallgeschwindigkeiten und Fallzeiten unter sich und zur Curve.

Das Problem I_1 ist von Euler am ausführlichsten behandelt worden, die Gleichung seiner Curve für den Specialfall $N + C =$ absolutes Gewicht ist vom fünften Grade und stimmt vortrefflich mit der Lösung von l'Hôpital und Varignon überein. Eine genaue Discussion dieser Curve und eine eigentümliche Art ihrer Ableitung habe ich bei einer anderen Gelegenheit gegeben.

Abgesehen von unbedeutenden Anknüpfungen an unser Problem finde ich bis zur Neuzeit keine weitere Behandlung desselben, nur Pater Jullien bringt es und ähnliche in seinen Problêmes de mécanique rationelle I. pg. 405 als Auszug aus den Arbeiten von l'Hôpital, Varignon und Euler, auch er schenkt dem resultirenden Integrale keine weitere Aufmerksamkeit. Erwähnung verdient ferner noch eine kurze allgemeine Darstellung von dem Engländer B. Peirce in dessen Physical and celestial Mechanic, worin es pg. 370 §. 647 heisst: „The curve, in which the law of pressure is everywhere the same, may be called a „barytrope", and that barytrope in which the pressure is everywhere the same may be called a „tautobaryd."

II.

Bei der Durchsicht der genannten Arbeiten über die barytropen und tautobaryden Curven erschien mir ein besonderer Fall der barytropen Bewegung noch zu wenig untersucht. Bezeichnet man nämlich unter der Voraussetzung, dass die vorgeschriebene Bahn eine ebene sei, die Normalcomponente der treibenden Kräfte mit N, die Geschwindigkeit in einem bestimmten Punkte mit v und den entsprechenden Krümmungs-

radius mit ρ, so wird der auf die Bahn von dem materiellen Punkte mit der Masse m ausgeübte Druck R ausgedrückt durch

$$R = N \pm \frac{mv^2}{\rho} \tag{1}$$

In dieser Gleichung kann R, wenn die übrigen Grössen bestimmt sind, als eine beliebige Function etwa des Curven-Boges s, oder der Zeit t, oder der Coordinaten des zu Grunde gelegten Systems gegeben sein; es dürfte sich jedoch auch empfehlen, das Verhältniss von R zu einem der Bestandtheile des Gesammtdrucks als Bedingungsgleichung zu Grunde zu legen, entweder $R: N$, $R: \frac{mv^2}{\rho}$ oder schlieslich $N: \frac{mv^2}{\rho}$; diesen letzteren Fall babe ich herausgegriffen, sodass also die Forderung lautet:

Es sind diejenigen ebenen Curven zu bestimmen, auf denen sich ein materieller Punkt unter dem Einflusse einer treibenden Kraft derart bewegt, dass das Verhältniss zwischen dem durch die Kraftcomponente allein ausgeübten Druck zu dem von der Centrifugalkraft herrührenden ein bestimmtes sei.

Der Gang der Untersuchung ist nun genau vorgeschrieben; ich werde die auftretende Differentialgleichuug soweit als möglich zu integriren suchen und alsdann dem constanten Verhältnisse (n) eine Reihe von Werten beilegen, wodurch jedenfalls eine Schaar von Curven bestimmt wird. Die Integrationen gedenke ich noch nach einer zweiten Art durchzuführen, die von der bei ähnlichen Problemen gebräuchlichen abweicht und, wie ich glaube, mancherlei Vorteile bietet. Von der Bedingungsgleichung

$$N: \frac{mv^2}{\rho} = n \tag{2}$$

ausgehend, werde zunächst angenommen, dass die Bahn auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem bezogen sei, in dessen Ursprung der materielle Punkt die Bewegung mit einer bestimmten Anfangsgeschwindigkeit beginne. Man hat sodann

$$N = Y \frac{dx}{ds} - X \frac{dy}{ds}; \tag{3}$$

worin X u. Y vorläufig noch unbestimmte Functionen der treibenden Kraft sind. Das Vorzeichen von $\frac{mv^2}{\rho}$ lässt man am besten ganz unbestimmt, da über das Zeichen von ρ gar nichts gesagt ist und ein Rechnen mit beiden Vorzeichen nichts Neues liefern würde.

Aus (1) u. (2) ergibt sich

$$\left[Y \frac{dx}{ds} - X \frac{dy}{ds}\right] : \frac{mv^2}{\rho} = n \tag{4}$$

Ich vereinfache nun den Fall dadurch, dass die Masse durch eine einzige Kraft in der positiven Richtung der Y Achse angetrieben werde und nehme als solche die mit der Acceleration g wirkende Schwerkraft. Man stelle sich also die X Achse horizontal, die y Achse vertical verlaufend vor. Es wird dadurch

$$X \frac{dy}{ds} = 0,$$

$$Y \frac{dx}{ds} = mg \frac{dx}{ds},$$

und daher gestaltet sich Gl. (4) zu:

$$mg \frac{dx}{ds} : \frac{my^2}{\rho} = n, \text{ oder}$$

$$g \frac{dx}{ds} : \frac{v^2}{\rho} = n. \tag{5}$$

Da die Curven durch die Coordinaten x u. y bestimmt sein sollen, so hat man in (5) die Grössen ds u. ρ zu ersetzen durch

(5a)
$$ds = \sqrt{1 + p^2}\, dx, \quad p = \frac{dy}{dx}$$
$$\rho = \frac{\sqrt{(1+p^2)^3}}{q}, q = \frac{d^2y}{dx^2},$$

und wird so eine Differentialgleichung zwischen x, y erhalten, wenn man noch v durch diese Variabeln auszudrücken im Stande ist. Nun gilt für das Problem das Princip der lebendigen Kräfte; nach diesem ist, wenn der Punkt in der Anfangslage Mo die Coordinaten x_0, y_0 und die Geschwindigkeit v_0 besitzt,

$$\frac{1}{2} v^2 \; \frac{1}{2} v_0^2 = g\,(y - y_0),$$

und da das Achsensystem so gewählt ist, dass

$$y_0 = 0 \text{ für } v = v_0 \text{ ist,}$$
$$v^2 = v_0^2 + 2gy. \tag{6}$$

Hierdurch ist nun das Element der Zeit aus Gleichung (5)eliminirt. — Nebenbei bemerkt gestattet Gl. (6) sofort, die Geschwindigkeit für jeden Punkt der Bahn zu bestimmen und ergibt schliesslich noch einen einfachen Ausdruck für die Zeit t, in welcher ein bestimmter Weg zwischen den Ordinaten y_0 u. y zurückgelegt wird.

Es ist nämlich

$$dt = \frac{ds}{v}, \text{ also vermöge (6):}$$

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{v_0^2 + 2gy}} \tag{7}$$

III.

Die Verbindung der Gleichungen (5,) (5a) u. (6) ergibt

$$g \frac{dx}{\sqrt{1 + p^2}\, dx} : \frac{v^2_0 + 2gy}{\sqrt{(1 + p^2)^3}}\, q = n, \text{ oder}$$

$$g : \frac{v_0^2 + 2gy}{1 + p^2} \quad q = n$$

In dieser Differentialgleichung zweiter Ordnung lässt sich eine einfache Trennung der Variabeln y u. p vornehmen, wenn man bedenkt, dass

$$g = p. \frac{dp}{dy} \text{ ist.}$$

Man hat sodann: $g \frac{1 + p^2}{p\ dp} \cdot \frac{dy}{v_0^2 + 2gy} = n$, oder

$$\frac{g}{n} \cdot \frac{dy}{v_0^2 + 2gy} = \frac{p\ dp}{1 + p^2}, \text{ und}$$

$$\frac{2p\ dp}{1 + p^2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{2g\ dy}{v_0^2 + 2gy}.$$

Eine erste Integration liefert sonach

$$l(1 + p^2) = \frac{1}{n}\ l(v_0^2 + 2gy) + \text{Const.}$$

Die willkürliche Integrationsconstante verschmilzt mit dem Ganzen als $lk^{\frac{1}{n}}$

so dass $l(1 + p^2) = l[k(v_0^2 + 2gy)]^{\frac{1}{n}}$, oder

(1) $$1 + p^2 = [k(v_0^2 + 2gy)]^{\frac{1}{n}}.$$

k bestimmt sich vorläufig durch die Annahme, dass am Anfange der Bewegung die Masse die Geschwindigkeit v_0 unter einer Neigung τ_0 zur x-Achse habe; somit ist

$$1 + \tan^2\tau_0 = [k(v_0^2 + 2gy)]^{\frac{1}{n}}, \text{ oder}$$

(1a) $$k = \frac{1}{(v_0^2 + 2gy)\ \cos^{2n}\tau_0}$$

In (1) wird nun eine abermalige Trennung der Variabeln dadurch möglich, dass man p durch seinen früheren Wert ersetzt

(2) $$\frac{dy}{\sqrt{[k(v_0^2 + 2gy)]^{\frac{1}{n}} - 1}} = dx$$

Eine Integration ist, wie man sieht, nicht möglich, wenn von jetzt an nicht besondere Bestimmungen für das Verhältniss n getroffen worden. Ist dies geschehen und dadurch das Problem hinreichend specificirt, so werden sich durch Integrationen in endlicher oder unendlicher Form die gesuchten Curvengleichungen ergeben. Ehe ich indessen diesen Weg weiter verfolge, will ich die Integration von Gl. (5) noch in einer anderen eleganteren Weise vornehmen.

IV.

Bei Problemen dieser Art spielt der Neigungswinkel zwischen der Tangente und den Coordinatenachsen eine grosse Rolle, er ist gewöhnlich in den Anfangsbedingungen enthalten und gibt für jeden Moment der Bewegung die augenblickliche Bewegungsrichtung an; ferner erhält man für den Krümmungsradius mit Hülfe dieses Winkels einen kurzen Ausdruck, so dass die Integrationen auffallend einfach werden, wenn man x u. y als Funktionen dieser dritten Variabeln auffasst. Es lassen sich so auch manche Fragen über Verlauf und Krümmung der Curven sehr rasch und einfach beantworten.

Ich knüpfe nun wieder an Gleichung II5 an; τ bezeichne den Winkel zwischen Tangente und x-Achse, daher

$$\begin{cases} dx = ds \cos\tau \\ dy = ds \sin\tau \end{cases} \quad \frac{dy}{dx} = \tan\tau, \tag{1}$$

$$\text{und } \rho = \frac{ds}{d\tau}. \tag{2}$$

Substituirt man die betreffenden Worte in II5, so ist

$$g \cos\tau : \frac{v_0^2 + 2gy}{ds}\, d\tau = n$$

$$\text{oder } g \cos\tau : \frac{v_0^2 + 2gy}{dy} \sin\tau\, d\tau = n,$$

$$\text{woraus } \frac{\cos\tau}{\sin\tau d\tau} = \frac{n}{g} \cdot \frac{v_0^2 + 2gy}{dy},$$

$$\text{und } 2\frac{-\sin\tau d\tau}{\cos\tau} = -\frac{2g\, dy}{n(v_0^2 + 2gy)}.$$

Die Integration ergibt, da die Variabeln y und τ getrennt sind,

$$2 \operatorname{l}\cos\tau = \text{Const.} - \frac{1}{n}\operatorname{l}(v_0^2 + 2gy)$$

Die Constante vereinige ich mit dem Logarithmus als $\text{Const.} = \operatorname{l}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$, so dass

$$\operatorname{l}\cos^2\tau = \operatorname{l}\left[\frac{1}{k(v_0^2 + 2gy)}\right]^{\frac{1}{n}} \text{ und}$$

$$\cos^2\tau = \frac{1}{[k(v_0^2 + 2gy)]^{\frac{1}{n}}}.$$

Wünscht man anstatt cos τ die trigonometrische Tangente eingeführt, dann erhält man, weil

$$\cos^2\tau = \frac{1}{1 + \tan^2\tau} \text{ ist,}$$

(3) $$1 + \tan^2\tau = [k(v_0^2 + 2gy)]^{\frac{1}{n}}$$

Der Vergleich mit Gl. III_1 ergibt eine hübsche Uebereinstimmung. Die Grösse k bestimmt sich genau so wie durch Gl. III^{1a}.

Für den Fall, dass man die Variable τ bei den folgenden Untersuchungen beibehalten will, bedarf man noch einer Beziehung zwischen x u. τ, die sich sofort herleiten lässt.

$$\text{Aus Gl. } IV_1 \text{ hat man } dx = \frac{dy}{\tan\tau}.$$

Ferner löse man Gl. IV_3 nach y auf:

$$\cos^2\tau = \left[\frac{1}{k(v_0^2 + 2gy)}\right]^{\frac{1}{n}},$$

$$\cos^{2n}\tau = \frac{1}{k(v_0^2 + 2gy)},$$

(4) $$\text{woraus entspringt } v_0^2 + 2gy = \frac{1}{k\cos^{2n}\tau}$$

Man entnimmt nun aus (4) den Wert von dy durch Differentiation:

(4a) $$dy = \frac{n}{kg} \cdot \frac{\sin\tau\, d\tau}{\cos^{2n+1}\tau}$$

und setzt denselben in die obere Gleichung für dx ein:

(5) $$dx = \frac{n}{kg} \cdot \frac{d\tau}{\cos^{2n}\tau}$$

Die Integration ist auch hier nur in dem Falle möglich, wenn für n einige bestimmte Zahlen angenommen werden, und es geben alsdann Gl. IV_4 und die integrirte Gl. IV_5 völligen Aufschluss über die Natur der Curven. Ehe ich mich zur Betrachtung derselben wende, will ich noch die sehr einfachen Formeln für die Geschwindigkeit v und die Zeit t unter Anwendung der Variabeln τ geben.

Verbindet man Gl. II_6 und II_7 mit IV_1, und IV_4, dann findet man der Reihe nach:

(6) $$v = \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \frac{1}{\cos^n\tau}$$

(7) $$dt = \sqrt{k}\,\frac{\cos^n\tau}{\cos\tau}\,dx = \sqrt{k}\,\frac{\cos^n\tau}{\sin\tau}\,dy$$

Wenn nun noch in (7) dx resp. dy durch τ mit Hülfe von (4) und (5) ersetzt werden, so ist dt vollständig als Funktion von τ gegeben, nämlich

(8a) $$dt = \frac{n}{\sqrt{k}} \cdot \frac{dt}{\cos^{n+1}\tau}$$

Schliesslich ergibt sich noch ein einfacher Ausdruck für ds aus (IV_1) in Verbindung mit Gl. (IV_{4a}) und (IV_5):

$$ds = \frac{n}{kg} \cdot \frac{d\tau}{\cos^{2n+1}\tau}. \qquad (9)$$

Diese Formel lässt auch sofort den Krümmungsradius als Funktion von τ berechnen, denn $\rho = \frac{ds}{d\tau}$.

V.

Für die folgenden Discussionen lege ich theils die Gl. (III_2), teils (IV_{4a}) und (IV_5) zu Grunde, je nachdem sich die Eigenschaften der Bahnen nach der einen oder anderen Art besser erkennen lassen. Es handelt sich zunächst darum, dem Verhältnisse n solche Werthe aus der Zahlenreihe:
$-\infty, \ldots\ldots -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \ldots\ldots +\infty$ beizulegen. welche interessante, endliche Integrale liefern. Ich betrachte gleich von vorn herein die extremen Fälle.

1.

$$n = o \text{ und } n = \pm \infty$$

Gleichung III_2 wird für $n = o$ zu

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{[k(v_0^2 + 2gy)]^{\infty} - 1}.$$

Das Verhältniss n kann nur dann zu Null werden, wenn die Normalcomponente der Schwere Null oder die Centrifugalkraft unendlich wird. Der letzte Fall würde auf eine Curve mit unendlich kleinem Krümmungsradius führen, eine Lösung, die weiter keinen Sinn hat; der erstere führt auf die vertikale y-Achse, denn

$$\frac{dy}{dx} = \pm \infty = \tan (\tau = 90^0).$$

Hier ist indessen auch die Centrifugalkraft (C) gleich Null, so dass das Verhältniss

$$\frac{N}{C} = \frac{0}{0} = n$$

in unbestimmter Form erscheint.

$$\text{Für } n = \pm \infty \text{ ist } \frac{dy}{dx} = \sqrt{k(v_0^2 + 2gy)^{\,0} - 1}.$$

$$\text{also } \frac{dy}{dx} = 0 = \tan (\tau = 0^0).$$

Die Deutung dieses Falles ist einfach, wenn man die antreibende Kraft stets als endlich annimmt, so dass N niemals ∞ wird. Alsdann muss für $n = \pm \infty$ nothwendigerweise $C = 0$ sein, was durch die obige Gleichung bestätigt wird, denn sie stellt die horizontale x-Achse als Bahn dar.

2.

$$n = +1.$$

Es ist jetzt $\frac{dy}{\sqrt{k(v_0^2 + 2gy) - 1}} = dx,$

und durch sofortige Integration

$$\frac{1}{kg}\sqrt{k(v_0^2 + 2gy) - 1} = x + \text{Const.}$$

Die Constante bestimmt sich leicht, da für die Anfangslage gleichzeitig $x = 0$, $y = 0$ ist, als $\text{Const.} = \frac{1}{kg}\sqrt{kv_0^2 - 1}$.

Durch Einsetzen dieses Wertes und geeignetes Quadrieren gelangt man zu

$$y = \sqrt{kv_0^2 - 1}\,.\,x + \frac{kg}{2}x^2,$$

eine Gleichung, die der gemeinen Parabel angehört. Ein solches Resultat liess sich schon von vorn herein erwarten; denn wenn in allen Curvenpunkten $\frac{N}{C} = 1$ ist, wird die Bewegung derart sein, dass $N - C = 0$. Der Normaldruck verschwindet daher und die Bewegung geht so vor sich, als sei ihr gar keine Bahn vorgeschrieben, d. h. sie befolgt die Gesetze des freien Wurfes.

Die nähere Gestalt und Lage der Parabel kann erst dann erkannt werden, wenn die erste Integrationsconstante k für den vorliegenden Fall bestimmt ist.

Man erhält aus Gl. III_{1a} für $n = +1$

$$k = \frac{1}{v_0^2 \cos^2\tau_0}$$

und daher $y = \tan\tau_0 . x + \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\tau_0} . x^2.$

Die Schnittpunkte der Curve mit der x-Achse werden bestimmt durch die Wurzeln der Gleichung

$$0 = \tan\tau_0 . x + \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 v_0} . x^2;$$

$$\text{nämlich } x = \begin{cases} 0 \\ \text{und} \\ -\frac{v_0^2 \sin 2\tau_0}{g}. \end{cases}$$

Die Form der Gleichung zeigt, dass die Achse vertikal läuft, so dass die Abscisse des Scheitels dem halben Abstande des zweiten Schnittpunktes vom Ursprunge gleich

sein wird. Die Coordinaten des Scheitels x_0, y_0 lassen sich sofort erkennen, wenn man der Gleichung folgende bekannte Form durch einfache Transformation gibt:

$$\frac{2v_0^2 \cos^2\tau_0}{g}\left(y + \frac{v_0^2 \sin^2\tau}{2g}\right) = \left(x + \frac{v_0^2 \sin 2\tau_0}{2g}\right)^2$$

Man hat alsdann

$$x_0 = -\frac{v_0^2 \sin 2\tau_0}{2g},\ y_0 = -\frac{v_0^2 \sin 2\tau_0}{2g}.$$

Man muss nun die Coordinatenachsen um die gefundenen Werte x_0, y_0 verschieben und gelangt zur Scheitelgleichung der Parabel

$$x' = \frac{2v_0^2 \cos 2\tau_0}{g} y',$$

worin $\frac{2v_0^2 \cos 2\tau_0}{g} = p$ den Parameter darstellt.

Da nun die Directrix um den vierten Teil des Parameters vom Scheitel absteht, so läuft sie in der Höhe

$$y_0 - \frac{p}{4} = -\frac{v_0^2}{2g}$$

mit der horizontalen x-Achse parallel. Weil diese Höhe blos von v_0, nicht aber von der Neigung τ_0 der Anfangsgeschwindigkeit gegen den Horizont abhängt, so folgt, dass alle Parabeln, welche von demselben Anfangspunkte aus mit derselben Anfangsgeschwindigkeit unter den verschiedenen Neigungswinkeln von einem schweren Punkte beschrieben werden können, die Directrix gemein haben. Alle Parabeln liegen also mit der convexen Seite nach oben. Die Höhe $\frac{v_0^2}{2g}$ der Directrix über dem Horizont (der urspr. x-Achse) ist die Höhe, von welcher der bewegliche Punkt vertikal frei herabfallen muss, um die Geschwindigkeit v_0 zu erlangen.

Schreibt man ferner die Gleichung II6 (des Prinzips der leb. Kraft) in der Form

$$v^2 = 2g\left(\frac{v_0^2}{2g} + y\right),$$

so erkennt man, dass die Geschwindigkeit in den einzelnen Punkten der Bahn dieselbe ist, als ob der Punkt von der Directrix bis zu der betreffenden Stelle der Bahn frei gefallen wäre.

Die Gestalt und Lage der möglichen Parabeln ist (ausser von der Acceleration g) nur abhängig von v_0 und τ_0. Lässt man v_0 constant und legt dem Neigungswinkel alle möglichen Werte bei, so erhällt man 2 Gruppen von Parabeln. Diejenigen bei denen $\tau_0 = \begin{cases} 0_0 \text{ bis } 90_0 \\ 180_0 \text{ „ } 270_0 \end{cases}$ ist, schneiden die x-Achse auf der negativen Seite, die anderen, mit einem $\tau_0 = \begin{cases} 90_0 \text{ bis } 180_0 \\ 270_0 \text{ „ } 360_0 \end{cases}$ auf der positiven Seite, was unmittelbar aus der Abscisse des Schnittpunkts hervorgeht. Alle aber haben eine Enveloppe.

Durch Anwendung des Hülfswinkels τ erhält man sehr einfache Gleichungen und Integrationen.

Für $n = 1$ wird Gl. IV$_5$ zu $dx = \frac{d\tau}{kg \cos^2\tau}$

$$\text{also } x + \text{Const.} = \frac{1}{kg} \cdot \tan\tau.$$

Zur Bestimmung der Constante ist, da für $x = 0$, $\tau = \tau_0$,

$$\text{Const.} = \frac{1}{kg} \text{ tang } \tau_0$$

$$\text{Daher } x = \frac{1}{kg} (\tan\tau - \tan\tau_0)$$

$$\text{wozu noch gehört Gl. (IV}_4\text{)} \quad v_0^2 + 2gy = \frac{1}{k. \cos^2\tau}.$$

Die Constante k ergibt sich für $n = 1$ aus Gl. IV$_3$

$$k = \frac{1}{v_0^2 \cos^2\tau_0}$$

Besonders einfach wird der Ausdruck für die Zeit t. Nach Gl. IV$_{8a}$ ist für $n = 1$

$$dt = \frac{1}{g\sqrt{k}} \cdot \frac{d\tau}{\cos^2\tau}.$$

$$t = \frac{1}{g\sqrt{k}} \int_{\tau_0}^{\tau} \tan\tau.$$

Complicirter ist der Wert von s.

3.

$$n = -1$$

Wenn man sich des oben erwähnten Satzes von Euler erinnert, dass diejenige Curve, bei welcher der ganze Druck das doppelte desjenigen ist, welcher entweder durch Centrifugalkraft oder Schwerkraft allein ausgeübt wird, eine brachystochrone ist, dann steht die Cycloide zu erwarten.

Die Bedingungsgleichung ist

$$\frac{dy}{\sqrt{[k(v_0^2 + 2gy)]^{-1} - 1}} = dx,$$

oder nach einfacher Transformation

$$dx = \frac{k(v_0^2 + 2gy)\, dy}{\sqrt{k(v_0^2 + 2gy) - k^2(v_0^2 + 2gy)^2}}.$$

Man erkennt hierin schon die bekannte Differentialgleichung der Cycloide. Sie wird durch die Substitution

$$v_0^2 + 2gy = z$$

$$\text{zu} \quad 2\, gdx = \frac{zdz}{\sqrt{\frac{1}{k} z - z^2}}.$$

Schreibt man dafür

$$-2\, gdx = \frac{\left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2k} - z\right) dz}{\sqrt{\frac{1}{k} z - z^2}} = \frac{\left(\frac{1}{2k} - z\right) dz}{\sqrt{\frac{1}{k} z - z^2}} - \frac{\frac{1}{2k}\, dz}{\sqrt{\frac{1}{k} z - z^2}},$$

so erkennt man leicht, dass

$$-2\, gdx = d\sqrt{\frac{1}{k} z - z^2} - \frac{1}{2k}\, d \operatorname{Arccos}\left(\frac{\frac{1}{2k} - z}{\frac{1}{2k}}\right) \text{ ist,}$$

und durch die Integration:

$$x + \text{Const.} = \frac{1}{2g}\left[-\sqrt{\frac{1}{k} z - z^2} + \frac{1}{2k} \operatorname{Arccos}\left(\frac{\frac{1}{2k} - z}{\frac{1}{2k}}\right)\right],$$

die bekannte Gleichung der Cycloide für rechtwinkelige Achsen. Ein Vergleich mit der einfachsten Form der Cycloidengleichung:

$$x = -\sqrt{2\, ry - y^2} + r \operatorname{Arccos}\left(\frac{r - y}{r}\right), \; r \text{ Radius des Rollkreises,}$$

gibt sofort Aufschluss über die Lage und Gestalt der Curve.

Man gelangt nämlich zu dieser einfachen Form, indem man sowohl x- als auch y-Achse transformirt. Setzt man

$$x = x' - \text{Const.}$$

$$y = y' - \frac{v_0^2}{2g}, \; z = v_0^2 + 2gy,$$

so entspringt jene einfachste Gleichung, bei der die x-Achse die Basis der Cycloide bildet; die Curve beginnt ferner in den neuen Coordinatenursprung, wo sie von der y'-Achse tangirt wird. Die genaue Lage der Cycloide zu den alten Axen ergiebt sich erst dann, wenn die Constante bestimmt ist. Für das alte System ist aber gleichzeitig $x = 0$, $y = 0$, also

$$\text{Const.} = \frac{1}{2g}\left[-v_0\sqrt{\frac{1}{k} - v_0^2} + \frac{1}{2k} \operatorname{Arccos}\left(\frac{\frac{1}{2k} - v_0^2}{\frac{1}{2k}}\right)\right].$$

Demnach sind die Coordinaten des Anfangspunktes der Curve

$$x_0 = -\text{Const.}, y_0 \frac{v_0^2}{2g}.$$

Der Radius des Rollkreises (r) wird aus der transformirten Gleichung gefunden, nämlich

$$r = \frac{1}{4\ gk} = \frac{v_0^2}{4g\ \cos^2\tau_0}.$$

Aus dieser Formel lassen sich jetzt leicht die verschiedenen Cycloiden discutiren, welche resultiren, wenn man bei constanten v_0 dem τ_0 verschiedene Werte und umgekehrt beilegt.

$$\text{Für } \tau_0 = 0^0 \text{ ist } r = \frac{v_0^2}{4g},$$

das heisst, in diesem Fall ist der Anfangspunkt zugleich der tiefste Punkt der Cycloide.

$$\text{Für } \tau_0 = 90^0 \text{ ist } r = \infty,$$

die Curve geht in die vertikale y-Achse über.

Die Cycloiden gehen nicht von demselben Punkte aus, selbst bei constantem v_0, denn die Coordinate x_0 hängt durch k von τ_0 ab; dagegen haben sie dieselbe Basislinie, denn y_0 ist unabhängig von τ_0. Die ganze Schaar der Cycloiden besitzt eine Enveloppe. — Auch hier gilt ein ähnlicher Satz, wie bei der Parabel:

Die Geschwindigkeit in den einzelnen Punkten der Bahn ist dieselbe, als ob der Punkt von der Basis bis zu der betreffenden Stelle frei gefallen wäre.

Ungleich leichter werden alle diese Betrachtungen durch Einführung des Winkels τ. Die bekannten Gleichungen werden zu

$$v_0^2 + 2gy = \frac{1}{k} \cos^2\tau \text{ und } dx = -\frac{1}{kg} \cos^2\tau\ d\tau,$$

$$\text{woraus } x + \text{Const.} = -\frac{1}{kg}\left(\frac{\tau}{2} + \frac{1}{4} \sin 2\tau\right).$$

Gewöhnlich gebraucht man bei der Behandlung der Cycloide einen andern Hülfswinkel, den Wälzungswinkel ω, der indessen zu τ in der einfachen Beziehung steht:

$$\tau = 90^0 - \frac{1}{2}\omega = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\omega.$$

Durch Transformation des Winkels entspringen daher die Gleichungen

$$v_0^2 + 2gy = \frac{1}{k} \sin^2\frac{\omega}{2},$$

$$x + \text{Const.} + \frac{\pi}{4kg} = \frac{1}{4kg}(\omega - \sin\omega).$$

Die Winkel nehme ich hier in absolutem Bogenmass gemessen an. Die Uebereinstimmung mit den bekannten Gleichungen ist erkennbar, ebenso die zur Vereinfachung

vorzunehmende Transformation. Mit der grössten Leichtigkeit lassen sich hieraus die Eigenschaften der Cycloide ableiten.

Aus dem Bogendifferential

nach Gl IV9 $$ds = -\frac{1}{kg}\cos\tau\, d\tau \text{ wird}$$

$$s = -\frac{1}{kg}\int_{\tau_0}^{\tau}\sin\tau.$$

Somit lernt man die berühmte Tautochrone und Brachistochrone auch als merkwürdige Barytrope kennen.

4.

$$n = +\frac{1}{2}$$

Die Bedingungsgleichung für vorliegenden Fall:

$$\frac{dy}{\sqrt{[k(v_0^2 + 2gy)]^2 - 1}} = dx$$

erlaubt durch die Substitution

$k(v_0^2 + 2gy) = z$ und $2\,kgdy = dz$ die Umformung in

$$\frac{1}{2kg}\cdot\frac{dz}{\sqrt{z^2 - 1}} = dx.$$

Man gelangt zur Gleichung der gesuchten Curve sehr leicht dadurch, dass man noch einmal differentiirt.

Es ist zunächst:

$$h^2\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = (z^2 - 1), \text{ wenn } \frac{1}{2kg} = h \text{ gesetzt wird,}$$

und durch Differentation

$$h^2\frac{d^2z}{dx^2} = z.$$

Nach der vorhergehenden Gleichung ist aber:

$$z = \sqrt{1 + (h\,\tfrac{dy}{dx})^2},$$

daher $$\frac{hd\left(h.\frac{dz}{dx}\right)}{\sqrt{1 + \left(h\frac{dy}{dx}\right)^2}} = dx\ ;$$

oder da $$h.\frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dx} = p \text{ ist:}$$

$$dx = \frac{h.\,dp}{\sqrt{1+p^2}}.$$

Durch Integration: $x + m = h.l\left(p + \sqrt{1+p^2}\right)$.

Die Constante m möge vorläufig unbestimmt bleiben.

Es ist nun $$p + \sqrt{1+p^3} = e^{\frac{x+m}{h}}$$

und da $(p + \sqrt{1+p^2})(p - \sqrt{1+p^2}) = 1$ ist, auch

$$p - \sqrt{1+p^2} = -e^{-\frac{x+m}{h}},$$

mithin durch Addition

$$p = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x+m}{h}} - e^{-\frac{x+m}{h}}\right);$$

also $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x+m}{h}} - e^{-\frac{x+m}{h}}\right),$$

und durch abermalige Integration:

$$y + \text{Const.} = \frac{h}{2}\left\{e^{\frac{x+m}{h}} + e^{-\frac{x+m}{h}}\right\}.$$

Dies ist die Gleichung der gemeinen Kettenlinie.

Es erübrigt noch, m und die letzte Constante zu bestimmen.

Es ist für $x = 0$, $p = \tan \tau_0$, und desshalb

$$m = h.\,l\left(\tan \tau_0 + \sqrt{1 + \tan^2 \tau_0}\right)$$

oder $$m = \frac{1}{2gk}\, l\, \frac{1 + \sin \tau_0}{\cos \tau_0}.$$

Ferner ist nach Gl. III_{1a} für $n = \frac{1}{2}$:

$$k = \frac{1}{\cos \tau_0 . v_0^2,} \text{ so dass}$$

$$m = \frac{v_0^2 \cos \tau_0}{2g}\, l\left(\frac{1 + \sin \tau_0}{\cos \tau_0}\right).$$

Schliesslich berechnet sich leicht die Constante in der Gleichung der Kettenlinie, da gleichzeitig $x = 0$, $y = 0$, so dass die Gleichung wird zu:

$$y + \frac{v_0^2}{2g} = \frac{h}{2}\left\{e^{\frac{x+m}{h}} + e^{-\frac{x+m}{h}}\right\}$$

Aus dieser Gleichung geht hervor, dass die Curve nicht symmetrisch zur y-Achse liegt. Man erreicht die symmetrische Lage durch eine Transformation der Achsen, welche unmittelbar einleuchtet, derart, dass — m die Abscisse des neuen Coordinaten anfangs, $-\frac{v_0^2}{2g}$ die Ordinate desselben in Beziehung auf die alten Achsen ist. Der

Parameter der Curve h ist nach dem vorhergehenden $= \frac{v_0^2 . \cos \tau_0}{2g}$.

Nennt man nun die neue x′-Achse die Directrix der Kettenlinie, so ergeben sich genau dieselben Sätze für die Geschwindigkeiten v_0 und v, wie bei Parabel und Cycloide. — Der Parameter enthällt die Anfangsbedingungen v_0 und τ_0 und zeigt, dass bei constantem v_0 der Scheitel in den Anfangspunkt fällt, wenn $\tau_0 = 0$ ist, also die Anfangsgeschwindigkeit horizontal gerichtet ist. Lässt man τ_0 beliebig variiren, so erhält man eine Schaar von Kettenlinien, die eine Enveloppe haben. Die bekannten Eigenschaften der Curve lassen sich unmittelbar aus den vorhergehenden Gleichungen herleiten.

Z. B. ist

$$p^2 = \left(h \frac{dz}{dx} \right)^2 = z^2 - 1,$$

oder

$$\tan \tau = \sqrt{z^2 - 1},$$

eine merkwürdige Eigenschaft des Tangentenwinkels.

Ungemein rasch verlaufen die Rechnungen in den Gleichungen mit dem Hülfswinkel τ.

Es ist $$v_0^2 + vgy = \frac{1}{k \cos \tau}, \qquad dx = \frac{1}{2gk} \cdot \frac{d\tau}{\cos \tau}.$$

Das Integral der letzten Gleichung ist

$$x + \text{Const.} = \frac{1}{2kg} \, l \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\tau}{2} \right).$$

Die Grösse $\frac{1}{2kg} = h$ hat auch hier denselben Wert wie in der obigen Entwickelung, denn k bleibt unverändert.

Es ist nun für $x = 0$, $\tau = \tau_0$, also

$$\text{Const.} = h \, l \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\tau_0}{2} \right) = m.$$

Sodann $$\frac{x + m}{h} = l \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\tau}{2} \right).$$

Nimmt man nun die Gleichungen für x und y zusammen, so ergibt sich

$$\begin{cases} \cos \tau = \dfrac{1}{k(v\tau_0^2 + 2gy)} \\ \text{und} \\ \tan \left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\tau}{2} \right) = e^{\frac{x+m}{h}}, \end{cases}$$

aus denen sich sämmtliche, merkwürdigen Eigenschaften der Kettenlinie sofort ableiten lassen.

Das Bogendifferential

$$ds = \frac{1}{2kg} \cdot \frac{d\tau}{\cos^2\tau} = h \frac{d\tau}{\cos^2\tau} \text{ nach Gl. IV}_9$$

hat das Integral

$$s = h \int_{\tau_0}^{\tau} \tan \tau.$$

Dasselbe drückt aus, dass die Tangente der Neigung der Curve gegen die Horizontale dem Bogen vom Scheitel bis zum Berührungspunkt proportional ist. Ebenso leicht fliesst aus den ersten der zusammengehörigen Gleichungen:

$$\frac{1}{dx \sqrt{1 + \tan^2\tau}} = \frac{h}{\left(\frac{v_0^2}{2g} + y\right) \cdot dx}$$

durch Multiplication mit dx; ferner ist

$$dx \sqrt{1 + \tan^2\tau} = ds, \text{ folglich } \frac{v_0^2}{2g} + y = h \frac{ds}{dx}.$$

In Worten: In jedem Punkte der Kettenlinie ist die Projection der (bis zur Directrix gemessenen) Ordinate auf die Normale constant und gleich dem Parameter h.

5.

$$n = -\frac{1}{2}.$$

Für dieses Verhältniss ergibt die Differentialgl. zwischen dx und dy:

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{[k(v_0^2 + 2gy)]^{-2} - 1}}$$

oder

$$dx = \frac{[k(v_0^2 + 2gy)]\ dy}{\sqrt{1 - [k(v_0^2 + 2gy)]^2}}.$$

Das Integral ist sofort angebbar:

$$x + m = \frac{1}{2gk} \sqrt{1 - k^2(v_0^2 + 2gy)^2},$$

worin m die Integrationsconstante ist.

Durch Quadriren wird dieselbe zu:

$$(x + m)^2 + \left[y + \frac{v_0^2}{2g}\right]^2 = \left[\frac{1}{2kg}\right]^2.$$

Man erkennt die Gleichung eines Kreises, mit den Mittelpunktscoordinaten

$$x_1 = m, \qquad y_1 = -\frac{v_0^2}{2g}, \text{ und den Radius } r = \frac{1}{2kg}.$$

Zur näheren Bestimmung dieser Grössen findet man zuerst nach Gl. III_{1a}: $k = \frac{\cos \tau_0}{v_0^2}$ und sodann für die Anfangsbedingung $x = 0$, $y = 0$, die Grösse m.

Nämlich

$$x_1 = \pm \sqrt{r^2 - \left(\frac{v_0^2}{2g}\right)^2} = \pm \frac{v_0^2}{2g} \tan \tau_0,$$

$$y_1 = -\frac{v_0^2}{2g} \text{ und } r = \frac{v_0^2}{2g \cos \tau_0}.$$

Der Mittelpunkt des Kreises liegt daher über der Horizontallinie (x-Achse). Das doppelte Vorzeichen für x zeigt, dass 2 Kreise der Forderung genügen, von denen der eine auf der positiven Seite der x-Achse, der andere auf der negativen liegt mit einem Tangentenwinkel von $90^0 + \tau_0$. Die Schnittpunkte des Kreises mit den Achsen findet man aus der Gleichung, indem man x beziehungsweise y zu Null werden lässt, man erhält bei sorgfältiger Beachtung der Zeichen für den einen Kreis die Coordinaten:

$$x' = \begin{cases} 0 \\ +2 \frac{v_0^2}{2g} \tan \tau_0, \end{cases} \qquad y' = \begin{cases} 0 \\ -2 \frac{v_0^2}{2g}. \end{cases}$$

Die Betrachtung der Constanten gibt noch einige bemerkungswerte Aufschlüsse. Die Mittelspunktsordinate stellt die Fallhöhe eines frei fallenden Körpers dar; zieht man daher durch den Mittelpunkt eine Horizontale, so hat dieselbe die bekannte Eigenschaft der Directrix und Basis bei den vorhergehenden Barytropen. Bei constantem v_0 und variablem τ_0 erscheint eine ganze Schaar von Kreisen, die indessen, wie man später sieht, keine Enveloppe haben können. Für $\tau_0 = 0$, also bei horizontaler Anfangsgeschwindigkeit, ist

$$v = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Der Kreis berührt dann im Anfangspunkte die x-Achse. Bei vertikaler Anfangsgeschwindigkeit wird $r = \infty$ und der Kreis geht in die y-Achse über. Man sieht, dass alle bisher untersuchten Curven auch die gerade Linie (x- und y-Achse) als specielle Fälle in sich enthalten. —

Die Ordinate des einen Schnittpunkts mit der y-Achse enthält nicht den Winkel τ^0; bei constanter Anfangsgeschwindigkeit bewegt sich daher der materielle Punkt in Kreisen, die über derselben Sehne $-2 \frac{v_0^2}{2g}$ beschrieben sind; solche Kreise können keine Enveloppe haben.

Am gewöhlichsten untersucht man die Bewegung eines Punktes auf dem Kreise, indem man den Centriwinkel als Variable einführt wozu der Winkel τ die besten Dienste leistet. Es ist zunächst für $n = -\frac{1}{2}$:

$$v_0^2 + 2gy = \frac{\cos\tau}{k}, \text{ und } dx = -\frac{1}{2kg}\cos\tau d\tau,$$

woraus durch Integration $x + \text{Const} = -\frac{1}{2kg}\sin\tau.$

Die Constante k bleibt hier dieselbe wie bei den früheren Variabeln, daher ist

$$\text{Const} = -\frac{v_0^2}{2g}\tan\tau_0.$$

Das Bogendifferential ergibt sich als

$$ds = -\frac{1}{2kg}d\tau.$$

Bei geeigneter Lage der Coordinaten-Achsen, erhält man hieraus

$$s = -\frac{1}{2kg.}\tau.$$

Diese Eigenschaft des Kreises ist sofort anschaulich, wenn man erwägt, dass τ mit dem zum Bogen s gehörigen Centriwinkel innig zusammenhängt. Rechnet man nämlich wie gewöhnlich (z. B. beim Pendelproblem) die Centriwinkel von der durch den Mittelpunkt des Kreises gezogenen Vertikalen aus, so überzeugt man sich leicht dass dieselbe dem Tangentialwinkel gleich sind. Ersetzt man nun $\frac{1}{2kg}$ durch r, den Kreisradius, so ist

$$ds = -r\,d\tau$$

und durch Division mit dt: $\frac{ds}{dt} = -r\frac{d\tau}{dt}$,

eine bemerkenswerte Beziehung, weil $\frac{d\tau}{dt}$ die Winkel-Geschwindigkeit darstellt, wenn τ als Bogen mit dem Radius 1 beschrieben gedacht wird. Ferner hat man nach Gl. IV_{8a}

$$dt = -\frac{1}{2g\sqrt{k}}\cdot\frac{d\tau}{\sqrt{\cos\tau}}, \text{ und hieraus } -r\frac{d\tau}{dt} = \sqrt{\left(\frac{\cos\tau}{k}\right)}.$$

Durch die Integration dieser Gleichung erhält man τ als Funktion von t. Bekanntlich ist dies der einfachste Weg, um die Formel für die Schwingungsdauer des (Kreises) Kreispendels zu erhalten. In dem letzten Ausdruck wird τ durch eine elliptische Funktion befriedigt.

Mit dem Kreis ist die Reihe der bekannten Barytropen erschöpft, und es hat sich erwiesen, dass alle Curven, welche sonst bei Problemen ähnlicher Art merkwürdig sind, auch hier eine hervorragende Rolle spielen. Indessen lässt sich noch für einige weitere Werte von n die Integration in endlicher Form durchführen.

6.

$$n = +2.$$

Das Integral führt auf:

$$\frac{dy}{\sqrt{[k(v_0^2 + 2gy)]^{\frac{1}{2}} - 1}} = dx;$$

durch die Substitution $k(v_0^2 + 2gy) = z^2$

erhält dasselbe die Gestalt $dx = \frac{1}{gk} \cdot \frac{z\,dz}{\sqrt{z-1}}$.

Die weitere Substitution $z - 1 = u$ macht eine sofortige Integration möglich. Zunächst ist $dx = \frac{1}{gk} \cdot \frac{(u+1)\,du}{u^{\frac{1}{2}}}$, und endlich

$$g\,kx + \text{Const.} = \frac{2}{3}\sqrt{\left[\sqrt{k(v_0^2 + 2gy)} - 1\right]^3} + 2\sqrt{\sqrt{k(v_0^2 + 2gy)} - 1}.$$

Diese algebraische Curve hat kein weiteres Interesse, auch eine Transformation der Coordinaten lässt nichts von Bedeutung erkennen. Durchsichtiger und einfacher werden die andern Gleichungen. Es ergibt sich zuerst

$$v_0^2 + 2gy = \frac{1}{k\cos^4\tau},$$

und dann $dx = \frac{2}{kg} \cdot \frac{d\tau}{\cos^4\tau}$. Das Integral dieser Gleichung ist

$$\frac{kg}{2}x + \text{Const.} = \tan\tau + \frac{1}{3}\tan^3\tau.$$

7.

$$n = -2.$$

Hier ist $dx = \frac{dy}{\sqrt{[k(v_0^2 + 2gy)]^{-\frac{1}{2}} - 1}}$.

Die vorige Substitution führt auf die Gleichung

$$gk\,dx = \frac{z^2\,dz}{\sqrt{z - z^2}}.$$

Auch hier vollzieht sich die Integration leicht:

$$gkx + \text{Const.} = -\frac{3 + 2\sqrt{k(r_0^2 + 2gy)}}{4} \cdot \sqrt{\sqrt{k(v_0^2 + 2gy)} - k(v_0^2 + 2gy)}$$

$$+ \frac{3}{8}\,\text{Arcsin}\left(2\sqrt{k(v_0^2 + 2gy)} - 1\right).$$

In dieser Form lässt die transcendente Curve keine gründliche Discussion zu. Eher gelangt man auf jenem anderen Wege dazu, der unter allen Umständen wenigstens eine einfache, endliche Gleichung liefert. Es wird nämlich

$$v_0^2 + 2gy = \frac{\cos^4 \tau}{k} \quad \text{und} \quad dx = -\frac{2}{kg} \cos^4 \tau d\tau,$$

oder

$$-\frac{pg}{2} x + \text{Const.} = \frac{3}{8} \tau + \frac{1}{4} \sin 2\tau + \frac{1}{32} \sin 4\tau.$$

Die Bestimmung der Constanten hat für die letzten beiden Fälle keine Bedeutung. Alle übrigen Werte des Verhältnisses n zwischen der Normalcomponenten der Schwere und der Centrifugalkraft gestatten keine Integrationen in endlicher Form. Die Gleichungen mit τ lassen höchstens noch eine Gesetzmässigkeit für ganze positive oder negative Werte von n verfolgen. Auch die auftretenden Differentialgleichungen bieten bis auf eine einzige kein Interesse.

8.

$$n = -\frac{1}{4}.$$

Bei dieser Annahme ist

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{[k(v_0^2 + 2gy)]^{-4} - 1}}.$$

Setzt man

$$k(v_0^2 + 2gy) = 2gx \left(\frac{v_0^2}{2g} + y\right) = \frac{z}{m},$$

so ist

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{m}{z}\right)^4 - 1}},$$

$$\text{und} \quad dx = \frac{z^2 dz}{\sqrt{m^4 - z^4}}.$$

Man erkennt hier die Differentialgleichung der elastischen Curve (curva elastica, courbe élastique), die zuerst von Jacob Bernoulli (act. erudit. 1694 p. 272, 1695 p. 538) aufgestellt wurde. Ihre Gleichungen in τ sind:

$$v_0^2 + 2gy = \frac{\sqrt{\cos \tau}}{k} \quad \text{und} \quad dx = -\frac{1}{4kg} \sqrt{\cos \tau}\, d\tau.$$

Die hier auftretenden elliptischen Integrale setzen der gewönlichen Art der Betrachtung ein Hinderniss entgegen. Indessen lässt sich leicht aus der Gleichung zwischen x und y eine einfache Beziehung zum Krümmungsradius ableiten.

Man hat aus dieser: $\frac{dz}{dx} = \frac{\sqrt{m^4 - z^4}}{z^2}$,

sodann $\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + 1 = \frac{m^4}{z^4}$,

und $\sqrt{1 + p^2} = \frac{m^4}{z^4}$, $\frac{dz}{dx} = p$.

Wird dann nochmals differentiirt, so wird

$$2z = - m^2 \frac{q}{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{d^2z}{dx^2} = q,$$

oder $2z = - \frac{m^2}{\rho}$, wenn ρ den Krümmungsradius bezeichnet. Man denke nun die Ordinaten um das Stück $- \frac{v_0^2}{2g}$ transformirt, so dass die z die Ordinaten der Linie darstellen. Ferner bestimmt sich

$$m = \frac{1}{2gk} = \frac{v_0^2}{2g \cos \tau_0}$$

$$\text{weil } k = \frac{\sqrt{\cos \tau_0}}{v_0^2}, \text{ also aus obiger Gleichung:}$$

$$\rho = - \left(\frac{v_0^2}{2g}\right)^2 \frac{1}{2z \cos \tau_0}.$$

Die dem Anfangspunkt der Bewegung entsprechende Ordinate (freie Fallhöhe) ist demnach für eine horizontale Anfangsgeschwindigkeit ($\tau_0 = 0$) das arithmetische Mittel zwischen Krümmungsradius und der doppelten Ordinate. Bei einer vertikalen Anfangsgeschwindigkeit ist ρ überall unendlich gross, es geht daher die elastische Linie in die Ordinatenachse über. Aehnliche interessante Beziehungen entspringen aus den Formeln mit τ. Das Bogendifferential

$$ds = - \frac{1}{4kg} \sqrt{\cos \tau} \, d\tau$$

enthält den Krümmungsradius, weil $\rho = \frac{ds}{d\tau}$ ist.

Daher $\rho = - \frac{\sqrt{\cos \tau}}{4kg}$,

oder wenn man den bekannten Wert von k einsetzt:

$$\rho = - \frac{v_0^2}{4g} \sqrt{\left(\frac{\cos \tau}{\cos \tau_0}\right)}.$$

Hiermit beschliesse ich die Reihe derjenigen barytropen Curven, welche dem an die Spitze gestellten Gesetz unterworfen sind. Ich glaube gleichzeitig gezeigt zu haben, dass zur tieferen und gründlicheren Untersuchung die Einführung des Tangentenwinkels als Hülfsgrösse ungemein förderlich ist.